# Estimação da Estrutura Termo de Taxa de Juros por Spline Cúbico

Marcos Eugênio da Silva (*)

Spline Cúbico é uma técnica de interpolação que permite obter uma curva à vista de juros a partir dos preços (ou TIR) de títulos negociados no mercado. Como boa parte desses títulos paga cupons periódicos, as suas TIR não refletem as taxas de desconto em cada momento do tempo mostradas na estrutura a termo de taxa de juros (ETTJ). O propósito desta nota é ilustrar como obter a ETTJ de títulos públicos no Brasil usando splines cúbicos. O exemplo utilizado baseia-se nos títulos prefixados, LTN e NTNF, mas pode-se usar a mesma técnica para a obtenção de uma ETTJ "real", a partir das NTNB. A descrição teórica segue James e Webber (2000, p. 434 e seguintes).[1]

As equações dos preços dos títulos, $P$, podem ser escritas em formato matricial como uma função dos fluxos dos papéis e dos fatores de desconto. Assim, temos

$$P = C\delta + \varepsilon$$

Onde $P$ é o vetor coluna de preços (nº de títulos x 1), $C$ é a matriz de fluxos de caixa dos papéis (nº de títulos x nº de fluxos), $\delta$ é o vetor coluna de fatores de desconto (nº de fluxos x 1) e $\varepsilon$ é o vetor de erros (nº de títulos x 1). O problema é achar

$$\hat{\delta} = \arg\min_{\delta}\{\varepsilon'\varepsilon | \varepsilon = P - C\delta\}$$

Resolvendo por OLS

$$\hat{\delta} = (C'C)^{-1}C'P$$

O problema com essa solução é que ela é muito instável. A matriz $C$ tem muitos elementos e muitos zeros. Uma alternativa é reescrever o problema definindo $\delta$ como uma transformação linear de um vetor $\lambda$ a partir de uma base que constitui uma matriz $B$. Assim, podemos escrever $P$ como

$$P = CB'\lambda + \varepsilon, \ \delta = B'\lambda$$

A solução para $\lambda$ equivale à solução inicial para $\delta$. Definindo $D=CB'$ temos

$$\hat{\lambda} = \arg\min_{\lambda}\{\varepsilon'\varepsilon | \varepsilon = P - D\lambda\}$$

A solução por OLS é

$$\hat{\lambda} = (D'D)^{-1}D'P$$

A partir de $\hat{\lambda}$ podemos recuperar os fatores de desconto estimados, $\hat{\delta}$, e depois transformar $\hat{\delta}$ em taxas de juros anuais, gerando assim a ETTJ.

Isso é mais fácil de resolver porque em geral $\hat{\lambda}$ tem muito menos elementos que $\hat{\delta}$ e a matriz $D$ é menor e muito mais densa que $C$.

A matriz $B$, no caso da técnica de spline cúbico, é definida como se segue.

Para um conjunto fixo preestabelecido de pontos no tempo chamados nós $\{\xi_0, \dots, \xi_n\}$ e para $p=0,\dots,n-4$, defina

$$B_p(\tau) = \sum_{j=p}^{p+4}\left(\prod_{i=p, i\neq j}^{p+4}\frac{1}{\xi_i - \xi_j}\right)(\tau - \xi_j)_+^3$$

$B_p(\tau)$ são B-splines cúbicos no momento $\tau$, que são diferentes de zero apenas no intervalo de 5 nós consecutivos $[\xi_p, \xi_{p+4}]$.

A forma geral de um spline cúbico é

$$s(\tau) = \sum_{i=0}^{3} a_i \tau^i + \frac{1}{3!}\sum_{p=1}^{n-1} b_p(\tau - \xi_p)_+^3$$

onde $(\tau - \xi_p)_+ = max(\tau - \xi_p, 0)$

Um spline cúbico é uma aproximação polinomial por partes, com polinômios de grau 3 diferenciáveis 2 vezes em todos os pontos. Os nós são os pontos em que polinômios adjacentes se encontram. A primeira parte da fórmula é um polinômio cúbico. A segunda parte é diferenciável apenas duas vezes nos nós. Para um spline com n+1 nós $\{\xi_0, \dots, \xi_n\}$, o spline tem n+3 parâmetros, $\{a_0, \dots, a_3, b_1, \dots, b_{n-1}\}$.

Essa fórmula geral não é adequada, pois as funções são ilimitadas e a modelagem de taxas de juros exige funções limitadas. As funções $B_p$ acima são limitadas e mais adequadas para o problema em questão.

Como o spline tem n+3 parâmetros, são necessárias n+3 equações. Mas existem apenas n-3 equações $B_p$, sendo necessárias mais 6 equações. O truque é definir nós adicionais fora do intervalo original $[\xi_0, \xi_n]$. Assim, o conjunto de nós fica

$$\{\xi_{-3}, \xi_{-2}, \xi_{-1}, \xi_0, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}\}$$

A aproximação da função fator de desconto $\delta$, usando $B_p$ fica

$$\delta(\tau) = \delta(\tau|\lambda_{-3}, \dots, \lambda_{n-1}) = \sum_{p=-3}^{n-1} \lambda_p B_p(\tau)$$

onde $\lambda = (\lambda_{-3}, \dots, \lambda_{n-1})'$ são os coeficientes a serem determinados por OLS. A matriz $B$ terá dimensão (n+3 x nº de fluxos), o vetor coluna $\delta$ será (nº de fluxos x 1), o vetor coluna $\lambda$ será (n+3 x 1) e p=-3,...,n-1.

No exemplo mostrado aqui o conjunto de nós será formado por 15 nós, 9 iniciais ([1/252 0,1 0,4 1 1,5 2 4 6 10]) mais 6 adicionais ([-3 -2 -1 15 20 25]):

| $\xi_{-3}$ | $\xi_{-2}$ | $\xi_{-1}$ | $\xi_0$ | $\xi_1$ | $\xi_2$ | $\xi_3$ | $\xi_4$ | $\xi_5$ | $\xi_6$ | $\xi_7$ | $\xi_8$ | $\xi_9$ | $\xi_{10}$ | $\xi_{11}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -3 | -2 | -1 | 1/252 | 0,1 | 0,4 | 1 | 1,5 | 2 | 4 | 6 | 10 | 15 | 20 | 25 |

Isso permite definir 11 funções $B_p$. Como n+1=9, tem-se n+3=11 parâmetros e o problema pode ser resolvido! Note-se que no problema original o vetor de fatores de desconto tinha 28 parâmetros (28 fluxos) a serem estimados. A Figura 3 mostra uma função $B_p$. A Figura 4 mostra todas as 11 funções geradas no exemplo tratado aqui.[2]

A solução $\hat{\lambda}$ acima é para o problema irrestrito. É conveniente forçar a curva de fatores de desconto a passar pelo valor presente da taxa Selic. Como ela é válida para 1 dia, o fator de desconto fica

$$\delta(1/252) = \delta(sel) = \frac{1}{\left(1 + \frac{sel}{100}\right)^{1/252}}$$

Isso trava a ponta curta do vetor de fatores de desconto e melhora o ajuste. Definimos

$W = (B_{-3}(1/252), \dots, B_{n-1}(1/252))'$ para o vetor de valores dos B-splines no vértice da selic e colocamos $w = \delta(1/252)$. A restrição é que $W'\lambda = w$. O problema restrito fica

$$\lambda^{\#} = \arg\min_{\lambda}\{\varepsilon'\varepsilon | \varepsilon = P - D\lambda, W'\lambda = w\}$$

A solução é

$$\lambda^{\#} = \hat{\lambda} + (D'D)^{-1}W(W'(D'D)^{-1}W)^{-1}(w - W'\hat{\lambda})$$

Resolvendo o problema restrito, com a curva passando pela Selic, com os dados de títulos públicos publicados pela ANBIMA em 23/02/2024, chegamos aos resultados mostrados na Tabela 1 e nas Figuras 1 e 2.[3] Na Figura 1, são mostradas, além da curva à vista de juros, as TIR (YTM) dos papéis em função das suas durações de Macaulay. Na Figura 2, aparece a mesma curva de juros e os nós do exemplo.

Note-se que os erros de estimativa das TIR dos títulos federais prefixados (LTNs e NTNFs) são menores que os reportados pela ANBIMA usando o modelo de Svensson.[4]

*Tabela 1 – Spiline Cúbico da Curva de Juros Prefixada*

| Títulos Públicos Federais | | | | | 23/Fev/2024 |
|---|---|---|---|---|---|
| **TIPO** | **Data de Vencimento** | **Tx. Indicativas Anbima** | **Tx. Estimadas Spline** | **Erro Spline (bps)** | **Erro Anbima - Svensson (bps)** |
| LTN | 01/04/2024 | 11,0225 | 11,0224 | 0,01 | -7,03 |
| LTN | 01/07/2024 | 10,4951 | 10,4975 | -0,24 | -1,70 |
| LTN | 01/10/2024 | 10,1535 | 10,1350 | 1,85 | 0,25 |
| LTN | 01/01/2025 | 9,9593 | 9,9846 | -2,53 | 5,61 |
| LTN | 01/04/2025 | 9,9250 | 9,9115 | 1,35 | -1,83 |
| LTN | 01/07/2025 | 9,8814 | 9,8819 | -0,05 | -2,28 |
| LTN | 01/10/2025 | 9,8957 | 9,8856 | 1,01 | -4,17 |
| LTN | 01/01/2026 | 9,8920 | 9,9146 | -2,26 | 1,16 |
| LTN | 01/04/2026 | 9,9681 | 9,9563 | 1,18 | -2,20 |
| LTN | 01/07/2026 | 10,0152 | 10,0064 | 0,88 | -1,50 |
| LTN | 01/07/2027 | 10,2437 | 10,2500 | -0,63 | 2,89 |
| LTN | 01/01/2028 | 10,3960 | 10,3787 | 1,73 | -0,08 |
| LTN | 01/01/2030 | 10,7720 | 10,7765 | -0,45 | -2,54 |
| NTNF | 01/01/2025 | 9,9965 | 9,9945 | 0,20 | 2,81 |
| NTNF | 01/01/2027 | 10,1026 | 10,1101 | -0,75 | 2,44 |
| NTNF | 01/01/2029 | 10,5184 | 10,5249 | -0,65 | 0,37 |
| NTNF | 01/01/2031 | 10,7543 | 10,7498 | 0,45 | -2,13 |
| NTNF | 01/01/2033 | 10,8100 | 10,8113 | -0,13 | 2,41 |
| NTNF | 01/01/2035 | 10,8960 | 10,8958 | 0,02 | -0,63 |
| RMSE | | | | 1,14 | 2,88 |

Fonte: Anbima e estimação própria.

*Figura 1 – ETTJ de Títulos Públicos Prefixados Estimada por B-Spline Cúbico – 23-fev-2024*

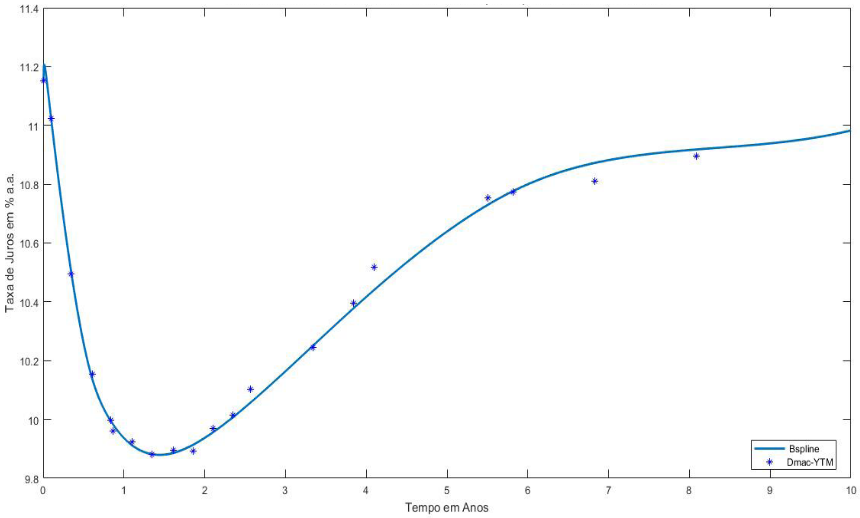


*Figura 2 - ETTJ de Títulos Públicos Prefixados - B-Spline Cúbico – 23-fev-2024*

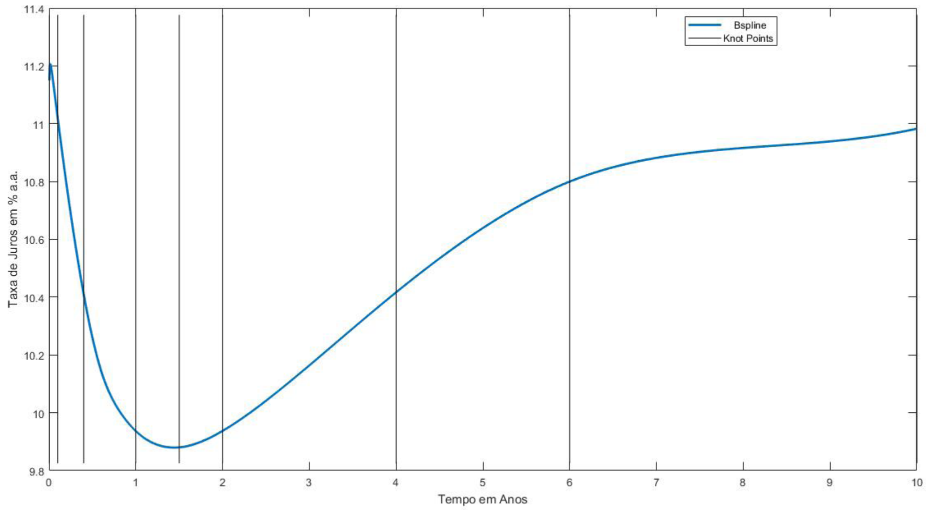



*Figura 3 – Exemplo de Função Base do B-Spline Cúbico*

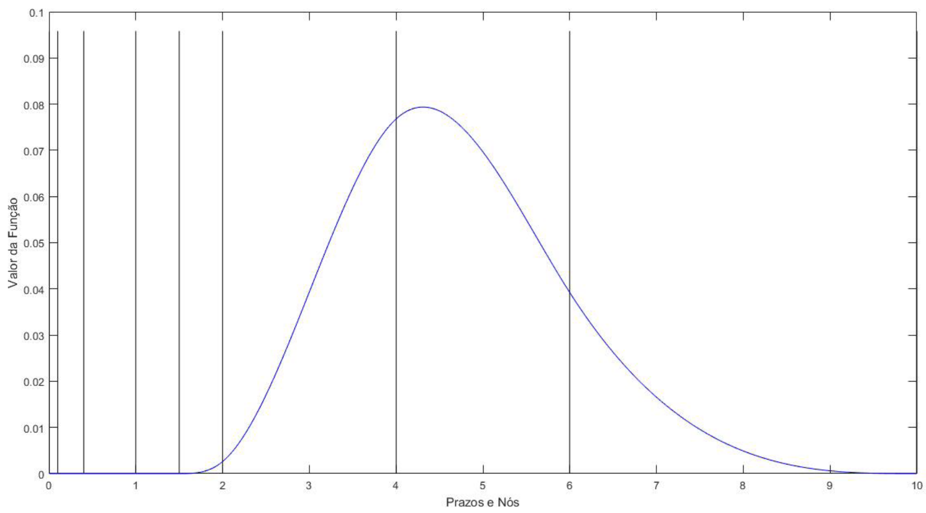
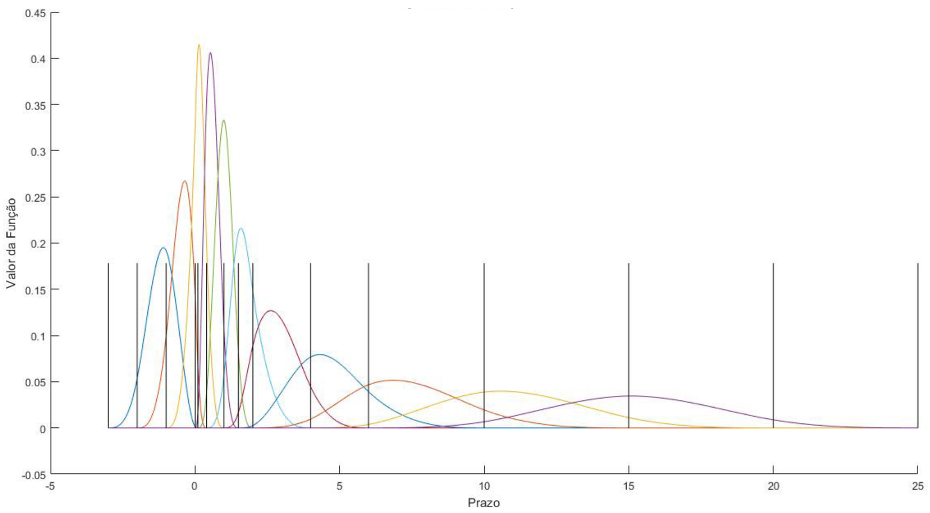


*Figura 4 - Funções Base do B-Spline Cúbico*




## Referência

JAMES, J.; WEBBER,N. **Interest rate modelling**. Wiley, 2000.

1 Alguns erros tipográficos foram encontrados nas fórmulas do texto e corrigidos para a implementação do modelo em MATLAB.

2 As dimensões das matrizes no exemplo ficam P(20x1), C(20x28), B(11x28), D(20x11), δ(28x1), λ(11x1). São 20 títulos (13 LTN, 6 NTNF e a Selic) e 28 pontos no tempo com fluxo de caixa diferente de zero para algum título.

3 Os fluxos dos papéis e os seus prazos em dias úteis foram reconstruídos, em rotinas EXCEL, a partir dos preços, taxas e datas de vencimento fornecidos pela ANBIMA. A taxa Selic foi 11,15 % a.a..

4 Não é possível garantir que isso ocorra sempre, pois os modelos de spline cúbico e de Svensson coexistem na literatura com bons resultados de ambos os lados.

*(*) Professor aposentado do Departamento de Economia da FEA-USP. (E-msail: medsilva@usp.br.).*